Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики
Факультет математики
Рабочая программа дисциплины
“Basic Algebra”
для совместной программы НИУ–ВШЭ и НМУ
“Math in Moscow”

С. М. Львовский

12 июля 2012

1. Организационно-методический раздел

1.1. Цель курса

Изучение основ абстрактной алгебры, а именно

- понятия группы преобразований вообще и свойств группы перестановок;
- понятия абстрактной группы, нормальной подгруппы и гомоморфизма, задания группы образующими и соотношениями;
- понятия коммутативного кольца и идеала, кольца главных идеалов и теории делимости, классификации конечно порожденных абелевых групп;
- понятия поля и их типичных примеров полей (поле комплексных чисел, числовые поля, p-адические числа, конечные поля)
- важными примерами некоммутативных колец (матричные алгебры, кватернионы, внешняя алгебра) и их применениями.

1.2. Задачи курса

Обучение основным понятиям абстрактной алгебры и базисным примерам. Выработка у студентов алгебраической интуиции, позволяющей увидеть алгебраическую структуру внутри данной математической задачи. Подготовка слушателей к освоению более продвинутых математических курсов, таких как теория представлений, алгебраическая геометрия, теория чисел и др. Подготовка к самостоятельному изучению литературы по алгебре и смежным областям математики.

1.3. Методическая новизна курса

Преподавание бо́льшей части тем, входящих в этот курс, имеет, разумеется, давнюю историю. Тем не менее я рассчитываю, что изложение абстрактных разделов алгебры не догматически, без стремления ознакомить студентов за отведенное время с возможно большим числом определений и с обязательным сопровождением каждого вводимого абстрактного понятия содержательными примерами, имеет инновационный характер.

1.4. Место курса в системе формируемых инновационных квалификаций

Абстрактную алгебру можно сравнить с воротами в современную математику. Она представляет собой универсальный язык, с помощью которого достигается бесценная экономия времени и сил как при дальнейшем изучении математики, так и при собственно научной работе. Благодаря развитию языка абстрактной алгебры исследователи смогли обнаружить множество ситуаций, в которых ряд различных на первый взгляд объектов, относящихся к разным разделам математики, являются воплощениями одной и той же алгебраической структуры, так что доказательство одной-единственной теоремы из алгебры заменяет доказательства нескольких теорем, получавшиеся различными способами.

Каждый студент-математик при переходе от элементарных курсов к более профессиональным должен пройти курс основ абстрактной алгебры.

2. Содержание курса

2.1. Новизна курса

Как уже отмечалось, идея курса абстрактной алгебры с основным упором на приложения абстрактных понятий является новой. Такие курсы обкатывались в рамках программы “Math in Moscow”; настоящая программа основана на программах этих курсов, переработанных с учетом научных вкусов автора.

2.2. Тематический план

название темы	количество часов		
	лек	упр	сам
Введение: группы перестановок и группы движений	2	2	8
Абстрактные группы	4	4	12
Свободные группы, образующие и соотношения, графы Кэли; парадокс Банаха–Тарского (если останется время)	4	4	12
Коммутативные кольца и идеалы; теория делимости чисел и многочленов	2	2	8
Определение и примеры полей, основные конструкции, комплексные числа	2	2	8
p-адические числа и их свойства	2	2	8
Неприводимые многочлены; присоединение корня и алгебраическое замыкание	4	4	12
Конечные поля	2	2	8
Конечно порожденные абелевы группы	2	2	8
Некоммутативные кольца и идеалы в них; матричная алгебра	2	2	8
Кватернионы	2	2	8
Внешняя алгебра	2	2	8
Плюккеровы координаты	2	2	8
итого	32	32	116

III. Содержание программы

Введение: группы преобразований. Понятие группы преобразований. Примеры: группы перестановок, группы изометрий. Композиция преобразований. Геометрический смысл сопряжения.

Абстрактные группы. Определение: группы, подгруппы, гомоморфизмы, нормальные группы. Теоремы о гомоморфизме. Действие группы на множестве. Теоремы Силова.

Немного комбинаторной теории групп. Свободные группы. Задание групп образующими и соотношениями. Графы Кэли. Парадокс Банаха–Тарского (если останется время).

Коммутативные кольца. Определения коммутативного кольца и идеала. Простейшая теория делимости. Кольца главных идеалов. Приложения к целым числам и многочленам.

Поля: определение и примеры. Комплексные числа. Примеры числовых полей. p-адические числа.

Поля: простейшие конструкции Неприводимые многочлены. Присоединение корня многочлена. Алгебраическое замыкание. Конечные поля.

Конечно порожденные абелевы группы Теорема классификации. Элементарные делители. Нахождение элементарных делителей методом Гаусса.

Некоммутативные кольца: определение и примеры Определение некоммутативных колец. Матричная алгебра и ее простота. Кватернионы.

Внешняя алгебра. Определение внешней алгебры. Интерпретация определителей с помощью внешней алгебры. Поливекторы и плюккеровы координаты.

2.3. Рекомендуемые учебники

1) Ash, Robert B. *Basic abstract algebra. For graduate students and advanced undergraduates.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2007.

2) Dummit, David S.; Foote, Richard M. *Abstract algebra.* Third edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004.

2.4. Формы контроля

Курс рассчитан на 2 модуля. Текущий контроль и, одновременно, важнейшая составляющая курса — самостоятельное решение студентами задач. Каждую неделю студент получает домашнее задание, которое он должен решить дома, а затем обсудить свои записанные решения с преподавателем во время практических занятий. Результаты решения домашних заданий оцениваются в баллах (разное число баллов за разные задачи); сумма баллов затем учитывается при выставлении итоговой оценки.

В конце первого модуля студенты сдают зачет, представляющий собой письменную работу из 5–6 задач, продолжительностью 4 астрономических часа.

В конце второго модуля студенты сдают экзамен, также представляющий собой письменную работу продолжительностью 4 астрономических часа, в ходе которой надо письменно решить 5–6 задач по всему курсу.

Итоговая оценка вычисляется по формуле

$$F = \frac{2}{3}\max(S, E) + \frac{1}{3}\min(S, E),$$

где E — оценка за экзамен (в первом модуле — зачет), а S — оценка за работу в семестре, вычисляемая, в свою очередь, по формуле

$$S = 10 * 1.5 * B/B_{\max},$$

где B — сумма баллов, набранных студентом за решение всех задач из домашних заданий (в первом модуле — за первый модуль, во втором модуле — за оба модуля), а $B_{\max}$ — наибольшая возможная сумма баллов за решение домашних заданий.

Таким образом, для получения максимальной оценки 10 баллов достаточно отлично написать экзамен и решить примерно 65% всех задач из домашних заданий.

2.5. Учебно-методические материалы

Образцы задач для домашних заданий и экзаменационных работ приводятся в дополнении к этой программе.